Prof. Dr. Alfred Toth

Die "mathematische Trinität"

1. In seiner bekannten, mehr populären als philosophischen, Einleitung in die Mathematik sagt Whitehead: "Die drei Begriffe der Veränderlichen, der Form und der Allgemeinheit bilden so etwas wie eine mathematische Trinität, die den ganzen Gegenstand beherrscht" (1958, S. 47). In der Tat ist erstaunlich, daß der Begriff der Zahl, die semiotisch gesehen ja lediglich einen Mittelbezug darstellt, zur komplexesten aller Wissenschaften geführt hat. Veränderlich sind auch Objekte oder mindestens die ihnen zugehörigen ontischen Orte, auch Objekte haben eine Form, und der Begriff der Allgemeinheit ist so allgemein, daß es beinahe trivial klingt, zu erwähnen, daß auch die ihre Objekte bezeichnenden Zeichen insofern allgemein sind, als sie mathematisch gesehen Abstraktionsklasse von Objekten darstellen.

2. Mit den beiden bislang vorgeschlagenen Definitionen der Zahl – als Objekt oder als Zeichen – hatten wir uns bereits in Toth (2015a) beschäftigt. Im folgenden sei die relationale Zahlendefinition Eulers photomechanisch wiedergegeben.

> Bey Bestimmungen, oder Ausmessungen der Grö-
> ßen von allen Arten, kömmt es also darauf an, daß
> erstlich eine gewisse bekannte Größe von gleicher Art
> fest
>
> fest gesetzet werde (welche das Maaß, oder die Ein-
> heit, genennet wird), und also von unserer Willkühr
> lediglich abhängt; hernach, daß man bestimme, in was
> für einem Verhältnisse die vorgegebene Größe gegen
> dieses Maaß stehe, welches jederzeit durch Zahlen an-
> gezeigt wird, so daß eine Zahl nichts anders ist als
> das Verhältniß, worinnen eine Größe gegen eine ande-
> re, welche für die Einheit angenommen wird, steht.

(Euler 1771, S. 4 f.)

2. Rein theoretisch besteht eine generativ-semiosische Relation zwischen Zahl, Anzahl und Nummer vermöge des in Toth (2015b) aufgestellten Schemas

Zahl := (M)
↓
Anzahl:= (M → (M → O))
↓
Nummer: = (M → ((M → O) → (M → O → I))).

Tatsächlich ist es jedoch so, daß ohne die Präsenz eines Objektes die drei Stufen dieser hierarchischen Inklusionsrelation nur rückwärts, d.h. degenerativ-retrosemiosisch, durchlaufen werden können. Ein Beispiel möge dieses Verfahren erläutern. Man detachiere ein Nummernschild von einem Haus. Damit entfernt man mit dem Interpretantenkonnex die Bedeutungsfunktion des Zeichenanteils der Nummer. Bietet jemand das Nummernschild zum Verkauf an, gibt es für den Käufer wohl keine Möglichkeit, den originalen Konnex der Nummer zu rekonstruieren. Ferner entfällt mit der Detachierung automatisch auch die Bezeichnungsfunktion, denn mit der Unmöglichkeit, die Straße zu befinden, geht diejenige einher, in dieser Straße das Haus zu finden, das die Nummer einst gleichzeitig gezählt und bezeichnet hatte. Ähnlich verhält es sich mit Anzahlen. Schreibt jemand auf ein Stück Papier: "12 Äpfel", so findet sich sowohl die Zahl als auch ihr Referenzobjekt. Wird das letztere eliminiert, bleibt die Zahl, wird die erstere eliminiert, bleibt das Objekt übrig. Steht also bloß "12" auf einem Zettel, ist völlig unklar, ob dies rein mittelbezogen z.B. die Summe von 6 + 6 ist oder objektbezogen ein Dutzend von Objekten irgend welcher Art bezeichnet hatte. Man kann also auf keinen Fall, ausgehend von einer semiotisch als Mittelbezug fungierenden Zahl, weder eine Bezeichnungsfunktion vermöge eines Referenzobjektes noch eine Bedeutungsfunktion vermögende eines als Umgebung des letzteren fungierenden Konnexes "halluzinieren". Euler spricht daher sehr treffend davon, daß eine Einheit "gesetzt" werde – das ist die in der Semiotik im Anschluß an Fichtes Logik so genannte thetische Einführung. Nicht nur Zeichen, sondern auch Objekte können thetisch eingeführt werden. Daher die Möglichkeit, die Zahl sowohl als "Ding" als auch als "Verhältnis" zu definieren. Genau hierin liegt also der Unterschied zwischen einem Mittelbezug wie z.B. einem Kreidestreich und einer Zahl: Ein Mittelbezug wird als Einheit wie ein Zeichen behandelt, d.h. der Mittelbezug "1" wird arbiträr gesetzt – so daß er, wie Euler sagt "von unserer Willkühr lediglich abhängt" - , allerdings ohne dabei als referentielle Kopie eines Objektes zu fungieren. Die Einheit "1" fungiert somit gleichzeitig als "Metaobjekt" (Bense 1967, S. 9) und als Objekt, denn Entitäten, die weder Bezeichnungs-, noch Bedeutungsfunktionen haben, müssen, da sich die Welt diskret in Objekte einerseits und in Zeichen andererseits einteilen läßt, Objekte sein, wenn sie keine Zeichen sind – die Gültigkeit des logischen Gesetzes des Tertium non datur natürlich immer vorausgesetzt. Zahlen sind also als Zeichen verwendete Objekte, und es dürfte daher kein Zufall sein, daß die Grundrechenarten nicht nur auf Zahlen, sondern auch auf Objekte anwendbar sind. Beispielsweise kann man Tische aneinanderreihen, d.h. "addieren". Man kann Stühle von Tischen entfernen, d.h. "subtrahieren". Man kann Tische und Stühle n-tupelweise vermehren, d.h. "multiplizieren", und man kann sie auf Personen verteilen, d.h. "dividieren". Objekte stehen nur für sich selbst, d.h. sie referieren nicht, wie dies Zeichen tun, als ungesättigtes Sein in 1-seitiger Objektabhängigkeit auf anderes, gesättigtes Sein, so wie z.B. eine Postkarte der Zugspitze als Zeichen das Objekt der Zugspitze voraussetzt. Genauso verhält es sich mit den Zahlen. Solange es sich um reine Mittelbezüge handelt, die also wie Objekte behandelt werden können, verdanken sie ihre Allgemeinheit gerade dem Umstand, daß sie weder Bezeichnungs- noch Bedeutungsfunktion besitzen. Damit dürfte klar sein, daß die von Hegel in die Welt gesetzte Behauptung, die Zahl sei eine Menge von Qualitäten, die bis auf die eine Qualität der Quantität reduziert worden sei, falsch ist. Das Gegenteil ist der Fall: Durch Abbildungen von Zahlen auf Objekte werden aus Zahlen Anzahlen, und durch Einbettung von Anzahlen in Umgebungskonnexe werden aus Anzahlen Nummern.

Literatur

Euler, Leonhard, Vollständige Anleitung zur Algebra. St. Petersburg 1771

Toth, Alfred, Die Zahl als Ding oder als Verhältnis. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2015a

Toth, Alfred, Grundlegung einer Theorie der Nummern I-II. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2015b

Whitehead, Alfred N., Eine Einführung in die Mathematik. 2. Aufl. Bern 1958

19.6.2015